

# Thermodynamique de sous-systèmes simples

## 3.1 Thermalisation de deux gaz séparés

★★★★ Un système isolé est constitué de deux sous-systèmes fermés 1 et 2 séparés par une paroi diatherme imperméable. Initialement, ils sont maintenus à températures  $T_1^i$  et  $T_2^i$ . Le sous-système 1 contient  $N_1$  moles de gaz. L'énergie interne du gaz est donnée par  $U_1 = c_1 N_1 R T_1$ , où  $T_1$  est la température du gaz,  $R$  est une constante positive et  $c_1$  est un coefficient sans dimension. De manière similaire, il y a  $N_2$  moles de gaz dans le sous-système 2 et l'énergie interne du gaz est donnée par  $U_2 = c_2 N_2 R T_2$ .

- 1) Déterminer la variation d'énergie interne  $U_1$  due à la thermalisation.
- 2) Comparer la température initiale  $T_2^i$  du sous-système 2 et la température finale  $T_f$  du système si la taille du sous-système 2 est beaucoup plus grande que celle du sous-système 1.

## ~~3.2~~ Thermalisation de deux substances séparées

★★★★ L'entropie  $S$  d'une substance particulière s'écrit en termes de son énergie interne  $U$  et du nombre de mole  $N$  comme,<sup>(1)</sup>

$$S(U, V, N) = NR \ln \left( 1 + \frac{U}{NE_0} \right) + \frac{RU}{E_0} \ln \left( 1 + \frac{NE_0}{U} \right)$$

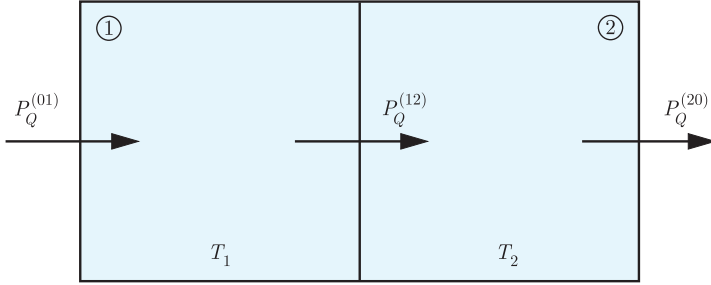
où  $R$  et  $E_0$  sont des constantes positives. Un système est constitué de deux sous-systèmes contenant une telle substance, avec  $N_1$  moles dans le sous-système 1 et  $N_2$  moles dans le sous-système 2. Lorsqu'ils sont mis en contact thermique, leurs températures initiales sont  $T_1^i$  et  $T_2^i$ . Déterminer la température finale  $T_f$  du système.

---

<sup>(1)</sup> G. Carrington, *Basic Thermodynamics*, Oxford Science Publications (1994).

### ✂ Transfert thermique stationnaire entre deux blocs

☆☆☆☆ Un système formé de deux blocs, considérés comme des systèmes simples rigides, sont en contact thermique (fig. 3.1). Le bloc 1 est maintenu à une température  $T_1$  et le bloc 2 à une température  $T_2 < T_1$ . Un transfert de chaleur a lieu entre les blocs en régime stationnaire.



**Fig. 3.1** Un transfert thermique a lieu entre un bloc 1 à température  $T_1$  et un bloc 2 à température  $T_2$ .

On dénote  $P_Q^{(01)}$  le transfert de chaleur de l'environnement (libellé 0) vers le bloc 1,  $P_Q^{(12)}$  le transfert de chaleur du bloc 1 vers le bloc 2 et  $P_Q^{(20)}$  le transfert de chaleur du bloc 2 vers l'environnement.

En régime stationnaire, montrer que les puissances thermiques exercées par l'environnement sur le premier bloc, par le premier bloc sur le deuxième, et par le deuxième bloc sur l'environnement sont égales et écrites comme,

$$P_Q \equiv P_Q^{(01)} = P_Q^{(12)} = P_Q^{(20)}$$

### ✂ Thermalisation de deux blocs

☆☆☆☆ On considère un système formé de deux blocs métalliques homogènes libellés 1 et 2 qui peuvent être considérés comme des systèmes simples rigides. Ces blocs sont constitués de  $N_1$  et  $N_2$  moles de métal respectivement. Ils sont initialement séparés et ont des températures  $T_1$  et  $T_2$ . Lorsqu'ils sont mis en contact, ils atteignent progressivement l'équilibre thermique. La température finale du système est  $T_f$ . Le système peut être considéré comme isolé. L'énergie interne  $U_i$  du bloc  $i = 1, 2$  est une fonction de sa température  $T_i$  et du nombre  $N_i$  de moles de substance dans le bloc,

$$U_i = 3N_iRT_i$$

où  $R$  est une constante positive.

- 1) Déterminer la température finale  $T_f$  du système de deux blocs à l'équilibre thermique.
- 2) Calculer la variation d'entropie  $\Delta S$  du système de deux blocs lors du processus qui l'amène à l'équilibre thermique.

## ✂ Diffusion d'un gaz à travers une paroi perméable

★★★★★ On désire modéliser la diffusion d'un gaz constitué d'une seule substance à travers une paroi perméable diatherme. On considère un système isolé contenant  $N$  moles de gaz, formé de deux sous-systèmes de volumes identiques séparés par une paroi perméable rigide. Le gaz diffuse d'un sous-système à l'autre. Il y a  $N_1(t)$  moles de gaz dans le sous-système 1 et  $N_2(t)$  moles dans le sous-système 2. On modélise les potentiels chimiques en considérant qu'ils sont proportionnels à la quantité de substance :

$$\mu_1(N_1) = \frac{\ell}{FA} \frac{N_1}{2\tau}$$

$$\mu_2(N_2) = \frac{\ell}{FA} \frac{N_2}{2\tau}$$

où  $\tau > 0$  est un temps caractéristique de diffusion,  $F > 0$  le coefficient de diffusion de Fick et  $\ell > 0$  une longueur caractéristique. Initialement, il y a  $N_0$  moles dans le sous-système 1, i.e.  $N_1(0) = N_0$ , et  $N - N_0$  moles dans le sous-système 2, i.e.  $N_2(0) = N - N_0$ . Déterminer l'évolution du nombre de moles  $N_1(t)$  et  $N_2(t)$  dans les sous-systèmes 1 et 2. En déduire, le nombre de moles dans chaque sous-système à l'équilibre.

## ✂ Amortissement mécanique par transfert de chaleur

★★★★★ Un système isolé de volume  $V$  est constitué de deux sous-systèmes, notés 1 et 2, séparés par une paroi imperméable, diatherme et mobile de masse  $M$  et de volume négligeable. Les deux sous-systèmes sont à l'équilibre thermique à température  $T$ . Ils sont constitués chacun de  $N$  moles de gaz parfait, ce qui signifie que la pression  $p_i$  du gaz dans le sous-système  $i$ , son volume  $V_i$ , le nombre de moles  $N$  et la température  $T$  sont liés par l'équation  $p_i V_i = NRT$  où  $R$  est une constante positive (sect. 5.6). La masse du gaz est négligeable par rapport à la masse de la paroi et l'énergie interne de la paroi est négligeable par rapport à celle du gaz. Initialement, le système n'est pas à l'équilibre mécanique. On considère que la variation de volume  $\Delta V$  entre le volume  $V_i$  de chaque sous-système et son volume  $V_0$  à l'équilibre mécanique est petite, i.e.  $\Delta V \ll V_0$ .

- 1) Exprimer la puissance dissipée  $T\Pi_S$  en termes de la variation de pression entre les sous-systèmes  $p_1 - p_2$  et des dérivées temporelles du volume  $V_1$  du sous-système 1.
- 2) Déterminer l'équation d'évolution du volume  $V_1$  du sous-systèmes 1 à l'aide de la condition d'évolution du deuxième principe.
- 3) Compte tenu du fait que les sous-systèmes sont constitués d'un gaz parfait, à l'aide d'un développement limité au premier ordre en  $\Delta V/V_0$ , montrer que l'équation du mouvement de la paroi est celle d'un oscillateur harmonique amorti,

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

où  $x$  est la coordonnée du déplacement de la paroi par rapport à la position d'équilibre. Déterminer l'expression du coefficient de frottement  $\gamma$  et de la pulsation  $\omega_0$  des oscillations non-amorties.

- 4) En régime d'amortissement faible, i.e.  $\gamma < \omega_0$ , déterminer la période  $T$  des oscillations amorties.

### 3.7 Production d'entropie par thermalisation

★★★★ Dans le problème résolu 3.4 traitant de la thermalisation de deux blocs, montrer que dans le cas particulier où  $N_1 = N_2 = N$  la variation d'entropie,

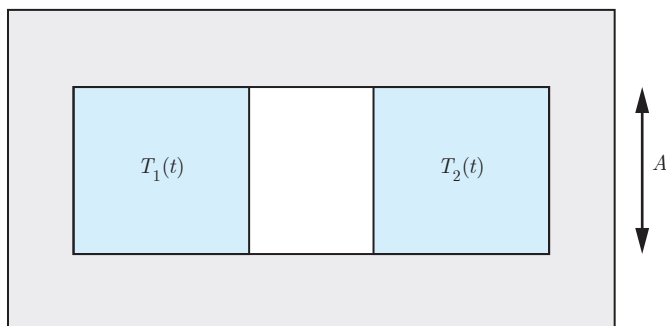
$$\Delta S = 3N_1 R \ln \left( \frac{T_f}{T_1} \right) + 3N_2 R \ln \left( \frac{T_f}{T_2} \right)$$

est strictement positive.

### ~~3.8~~ Production d'entropie par transfert de chaleur

★★★★ Un système est constitué des deux sous-systèmes, notés 1 and 2, analysés dans le problème résolu 3.3. En utilisant le deuxième principe (2.2), montrer que dans un état stationnaire où  $T_1 > T_2$ , le taux de production d'entropie  $\Pi_S$  est positif lors d'un transfert de chaleur à travers les deux sous-systèmes malgré le fait que, d'après l'équation (2.23),  $\Pi_{S_1} = \Pi_{S_2} = 0$ .

### 3.9 Thermalisation par radiation



**Fig. 3.2** Deux blocs formés du même matériau sont séparés par une couche d'air. La convection et la conduction thermique à travers la couche d'air sont négligeables. Les blocs atteignent un état d'équilibre thermique dû au transfert de chaleur par radiation.

☆☆☆☆ Un système isolé est constitué de deux blocs de même substance (fig. 3.2). Les énergies internes des blocs 1 et 2 sont  $U_1 = C_1 T_1$  et  $U_2 = C_2 T_2$  où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes positives. Deux côtés des blocs se font exactement face. La surface de chaque côté est  $A$  et ils sont séparés par une couche d'air. On néglige la conductivité thermique de l'air. La puissance thermique radiative que chaque bloc  $i$  exerce sur le bloc  $j$ , où  $i, j = 1, 2$ , s'écrit,

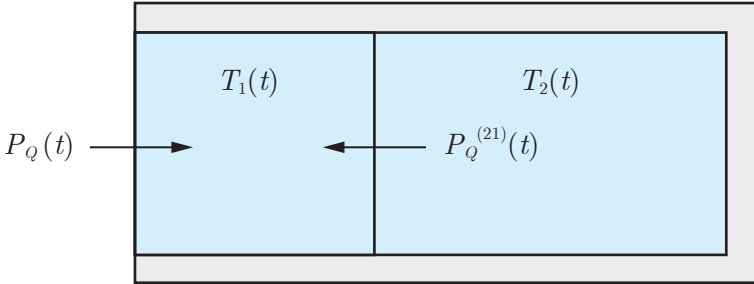
$$P_Q^{(ij)} = \sigma A \left( T_i(t)^4 - T_j(t)^4 \right)$$

où  $\sigma$  est un coefficient constant.

- 1) Déterminer la température finale  $T_f$  du système lorsqu'il atteint l'équilibre.
- 2) Etablir l'équation d'évolution temporelle pour  $T_1(t)$  et  $T_2(t)$ .
- 3) Considérer le cas particulier où  $C_1 = C_2 = C$  dans la limite de faibles variations de température, i.e.  $T_1(t) = T_f + \Delta T_1(t)$  et  $T_2(t) = T_f + \Delta T_2(t)$  avec  $\Delta T_1(t) \ll T_f$  et  $\Delta T_2(t) \ll T_f$  en tout temps. Montrer que la différence de température  $\Delta T(t) = \Delta T_1(t) - \Delta T_2(t)$  décroît exponentiellement.

### 3.10 Isolation thermique

☆☆☆☆ On modélise un bâtiment et son isolation comme deux sous-systèmes simples dénotés 1 et 2. L'état de chaque sous-système est caractérisé par sa température. Le sous-système 1 représente l'isolation. Le sous-système 2 représente le reste du bâtiment pour lequel il n'y a pas de transfert de chaleur avec l'environnement. Le transfert irréversible de chaleur entre le sous-système 2 et le sous-système 1 est décrit par la puissance thermique  $P_Q^{(21)}(t)$ .



**Fig. 3.3** Le sous-système 1 représente l'isolation et le sous-système 2 représente le reste du bâtiment. Le transfert de chaleur entre l'environnement et le sous-système 1 est décrit par la puissance thermique  $P_Q(t)$ . Le transfert de chaleur du sous-système 2 au sous-système 1 est décrit par la puissance thermique  $P_Q^{(21)}(t)$ . Il n'y a pas de transfert de chaleur direct entre l'environnement et le sous-système 2, ce qui est représenté par la paroi adiabatique entourant le système à l'exception de la partie du sous-système 1 qui est exposée à l'environnement.

Le sous-système 2 échange de la chaleur uniquement avec le sous-système 1 à travers une paroi diatherme de surface  $A$ , d'épaisseur  $\ell$  et de conductivité thermique  $\kappa$ . Cela est représenté sur la figure par une paroi adiabatique entourant

tout le système, à l'exception d'une partie du sous-système 1 qui est exposée au transfert réversible de chaleur avec l'environnement. Ce transfert de chaleur est décrit par la puissance thermique  $P_Q(t)$ . Le sous-système 1 a une température  $T_1(t)$ , sa chaleur spécifique constante est  $C_1$  et son énergie interne  $U_1$  s'écrit,

$$U_1 = C_1 T_1$$

Le sous-système 2 a une température  $T_2$ , sa chaleur spécifique constante est  $C_2$  et son énergie interne s'écrit,

$$U_2 = C_2 T_2$$

Le sous-système 1 est soumis à un transfert de chaleur périodique décrit par la puissance  $P_Q(t)$ . Pour simplifier les calculs, on écrit la puissance thermique  $P_Q(t)$  sous la forme d'une fonction complexe,

$$P_Q(t) = P_0 \exp(i\omega t)$$

de période,

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

qui correspond typiquement à une journée. Sur le plan phénoménologique, c'est la partie réelle de la puissance  $P_Q(t)$  qui décrit l'échange de chaleur entre l'environnement et le sous-système 1. Sous l'effet du transfert de chaleur périodique avec l'environnement, le système passe d'abord par une phase transitoire puis atteint une phase périodique, appelé régime harmonique, où les évolutions temporelles des températures complexes  $T_1(t)$  et  $T_2(t)$  des deux sous-systèmes sont des oscillations périodiques autour d'une température réelle  $T_0$  de même période que la puissance thermique  $P_Q(t)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} T_1(t) &= \Delta T_1 \exp(i\omega t) + T_0 = |\Delta T_1| \exp(i\phi_1(t)) \exp(i\omega t) + T_0 \\ T_2(t) &= \Delta T_2 \exp(i\omega t) + T_0 = |\Delta T_2| \exp(i\phi_2(t)) \exp(i\omega t) + T_0 \end{aligned}$$

où  $|\Delta T_1|$  et  $|\Delta T_2|$  sont les modules constants des amplitudes complexes des oscillations de température  $T_1(t)$  et  $T_2(t)$  et  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont les angles de déphasage de ces oscillations dans le plan complexe. Sur le plan phénoménologique, ce sont les parties réelles des températures complexes  $T_1(t)$  et  $T_2(t)$  qui représentent les températures physiques des deux sous-systèmes.

- 1) Pour une puissance thermique  $P_Q$  quelconque, déterminer le système d'équation différentielles couplées qui décrit l'évolution des températures  $T_1$  et  $T_2$  des deux sous-systèmes.
- 2) Dans le cas particulier où il n'y a pas de transfert de chaleur avec l'environnement, i.e.  $P_Q = 0$ , déterminer explicitement l'évolution temporelle de la différence de température  $T_2 - T_1$ .
- 3) Dans le cas particulier où il n'y a pas de transfert de chaleur avec l'environnement, i.e.  $P_Q = 0$ , déterminer le taux de production d'entropie  $\Pi_S$ .

- 4) Dans le régime harmonique dû au transfert de chaleur périodique avec l'environnement, en écrivant le système d'équations d'évolution couplées sous forme matricielle, en déduire le module du rapport des amplitudes complexes des oscillations de température  $|\Delta T_2/\Delta T_1|$  et l'angle de déphasage  $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$  entre ces amplitudes complexes  $\Delta T_2$  et  $\Delta T_1$ .